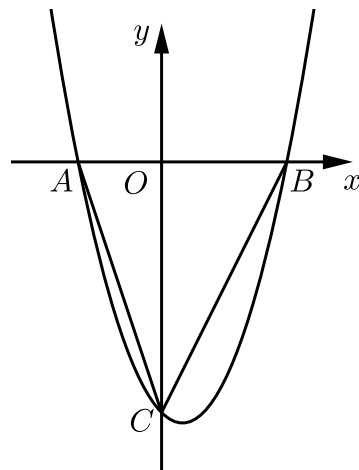


第1讲二次函数与面积问题（练习）

一、由坐标求面积

1. 如图所示，二次函数 $y = x^2 - x - 6$ 的图象交 x 轴于 A, B 两点，交 y 轴于 C 点，则 $\triangle ABC$ 的面积为 _____ .



【答案】 15

【解析】 在 $y = x^2 - x - 6$ 中，令 $y = 0$ ，则 $x^2 - x - 6 = 0$ ，

解得： $x_1 = 3$ ， $x_2 = -2$.

则 A 的坐标是 $(-2, 0)$ ， B 的坐标是 $(3, 0)$ ，

$\therefore AB = 5$.

在 $y = x^2 - x - 6$ 中，令 $x = 0$ ，则 $y = -6$.

$\therefore OC = 6$.

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot OC = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 = 15$.

【标注】【知识点】二次函数与面积

2. 若抛物线 $y = x^2 - 2mx + m^2 + m - 1$ (m 是常数) 的顶点是点 M ，直线 $y = x + 2$ 与坐标轴分别交于点 A, B 两点，则 $\triangle ABM$ 的面积等于 () .

A. 6

B. 3

C. $\frac{5}{2}$

D. $3\sqrt{2}$

【答案】 B

【解析】抛物线 $y = x^2 - 2mx + m^2 + m - 1$ 的顶点 M 坐标为 $(m, m - 1)$,

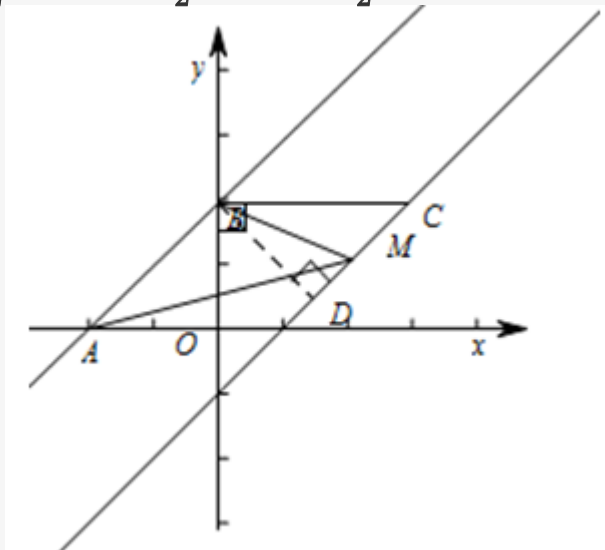
即 M 点在直线 $y = x - 1$,

直线 $y = x + 2$ 与坐标轴交点为 $(0, 2)$ 和 $(-2, 0)$,

$\therefore$ 直线 $y = x - 1$ 与 $y = x + 2$ 平行,

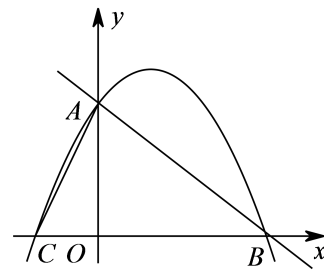
$\therefore \triangle ABM$ 底边 AB 上的高等于平行线间距离,

由图知 $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} AB \cdot BD = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = 3$.



【标注】【知识点】二次函数与面积

3. 如图, 在直角坐标系中, 已知直线 $y = -\frac{1}{2}x + 4$ 与 y 轴交于 A 点, 与 x 轴交于 B 点, C 点的坐标为 $(-2, 0)$.



- (1) 求经过 A 、 B 、 C 三点的抛物线的解析式.
 (2) 如果 M 为抛物线的顶点, 联结 AM 、 BM , 求四边形 $AOBM$ 的面积.

【答案】(1) 抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4$.

(2) $S_{\text{四边形}AOBM} = 31$.

【解析】(1) 易得, 点 $A(0, 4)$ 、 $B(8, 0)$ 、 $C(-2, 0)$,

可设抛物线解析式为 $y = a(x - 8)(x + 2)$,

将 $a(0, 4)$ 的坐标代入可得 $-16a = 4$,

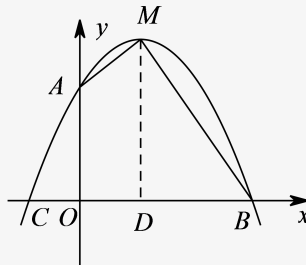
$$\therefore a = -\frac{1}{4},$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4$.

(2) 可求得抛物线顶点 $M\left(3, \frac{25}{4}\right)$,

作 $MD \perp OB$ 于点 D ,

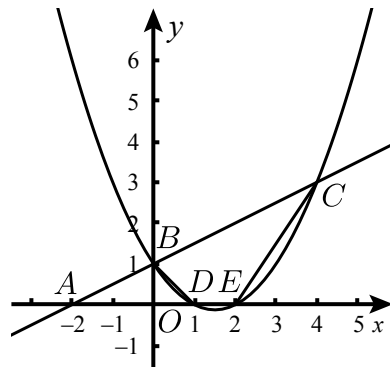
则



$$\begin{aligned} S_{\text{四边形}AOBM} &= S_{\text{梯形}AODM} + S_{\triangle MDN} \\ &= \frac{\left(4 + \frac{25}{4}\right) \times 3}{2} + \frac{5 \times \frac{25}{4}}{2} = 31. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】二次函数与面积

4. 如图, 一次函数 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 的图象与 x 轴交于点 A , 与 y 轴交于点 B . 二次函数 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与一次函数 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 的图象交于 B 、 C 两点, 与 x 轴交于 $D(1, 0)$, $E(2, 0)$ 两点.



- (1) 求二次函数的解析式.
(2) 求四边形 $BDEC$ 的面积 S .

【答案】(1) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$.

(2) $4\frac{1}{2}$.

【解析】(1) $\therefore$ 把 $x = 0$ 代入 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 得 $y = 1$,

$\therefore B(0, 1)$.

$\therefore$ 把 B 、 D 的坐标代入二次函数的解析式得.

$$\begin{cases} 1 = c \\ 0 = \frac{1}{2} + b + c \end{cases}, \text{解得 } b = -\frac{3}{2}, c = 1,$$

$\therefore$ 二次函数的解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$.

(2) 解方程组 $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1 \end{cases}$

得 $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 1 \end{cases}$,

$\begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = 3 \end{cases}$.

$\therefore B(0, 1)$,

$\therefore C(4, 3)$.

把 $y = 0$ 代入 $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$, 得

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1 = 0$.

解得 $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, 即 $D(1, 0)$, $E(2, 0)$.

$\therefore$ 由勾股定理得 $BC = \sqrt{4^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{5}$,

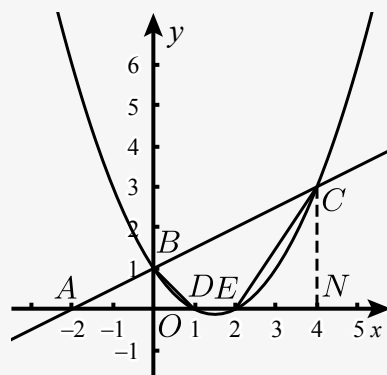
过 C 作 $CN \perp x$ 轴于 N .

则 $CN = 3$, $NE = 4 - 2 = 2$, $OD = OB = 1$.

$\therefore$ 四边形 $BDEC$ 的面积

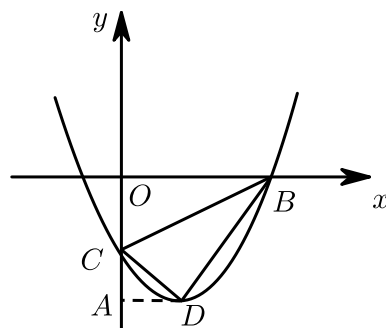
$S = S_{\text{梯形}BDNC} - S_{\triangle BOD} - S_{\triangle CNE} = \frac{1}{2} \times (1+3) \times 4 - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 - \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 4\frac{1}{2}$

故线段 BC 的长是 $2\sqrt{5}$, 四边形 $BDEC$ 的面积 S 是 $4\frac{1}{2}$.



【标注】【知识点】二次函数与直角三角形结合

5. 将抛物线 $y = x^2 - 4x + 4$ 沿 y 轴向下平移 9 个单位, 所得新抛物线与 x 轴正半轴交于点 B , 与 y 轴交于点 C , 顶点为 D . 求:



(1) 点 B 、 C 、 D 坐标.

(2) $\triangle BCD$ 的面积.

【答案】 (1) B 的坐标是 $(5, 0)$, C 的坐标是 $(0, -5)$, D 的坐标是 $(2, -9)$.

(2) 15.

【解析】 (1)

抛物线 $y = x^2 - 4x + 4$ 沿 y 轴向下平移 9 个单位后解析式是 $y = x^2 - 4x + 4 - 9$, 即 $y = x^2 - 4x - 5$.

$$y = x^2 - 4x - 5 = (x - 2)^2 - 9 ,$$

则 D 的坐标是 $(2, -9)$.

在 $y = x^2 - 4x - 5$ 中令 $x = 0$, 则 $y = -5$,

则 C 的坐标是 $(0, -5)$,

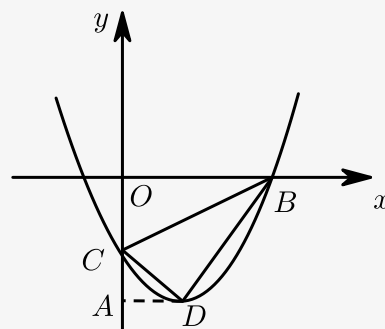
令 $y = 0$, 则 $x^2 - 4x - 5 = 0$,

解得 $x = -1$ 或 5 ,

则 B 的坐标是 $(5, 0)$.

(2) 过 D 作 $DA \perp y$ 轴于点 A .

则



$$S_{\triangle BCD} = S_{\text{梯形}AOBD} - S_{\triangle BOC} - S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}(2 + 5) \times 9 - \frac{1}{2} \times 2 \times 4 - \frac{1}{2} \times 5 \times 5 = 15$$

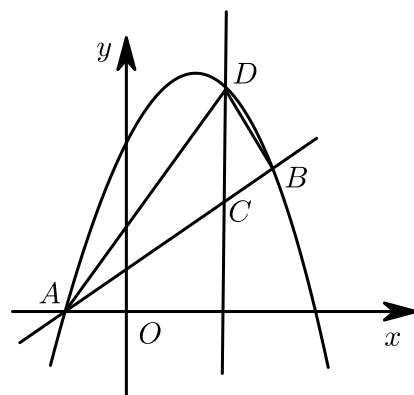
【标注】【思想】数形结合思想

【知识点】二次函数与面积

【知识点】二次函数与坐标轴交点

【知识点】二次函数平移变换

6. 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx + \frac{5}{2}$ 与直线 AB 交于点 $A(-1, 0)$, $B(4, \frac{5}{2})$, 点 D 是抛物线 A, B 两点间部分上的一个动点 (不与点 A, B 重合) , 直线 CD 与 y 轴平行, 交直线 AB 于点 C , 连接 AD , BD .



(1) 求抛物线的解析式.

(2) 设点D的横坐标为 m , $\triangle ADB$ 的面积为 S , 求 S 关于 m 的函数关系式, 并求出当 S 取最大值时的点C的坐标.

【答案】 (1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}$.

(2) $C(\frac{3}{2}, \frac{5}{4})$, $S = -\frac{5}{4}m^2 + \frac{15}{4}m + 5$

【解析】 (1) $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + \frac{5}{2}$ 与直线AB交于点 $A(-1, 0)$, $B(4, \frac{5}{2})$,

$$\therefore \begin{cases} 0 = a - b + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} = 16a + 4b + \frac{5}{2} \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的解析式是 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}$.

(2) 方法一: 设直线AB解析式为: $y = kx + b$,

$$\text{则有 } \begin{cases} -k + b = 0 \\ 4k + b = \frac{5}{2} \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases},$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2},$$

$$\text{则 } D(m, -\frac{1}{2}m^2 + 2m + \frac{5}{2}), C(m, \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}),$$

$$CD = \left(-\frac{1}{2}m^2 + 2m + \frac{5}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m + 2,$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}(m+1) \cdot CD + \frac{1}{2}(4-m) \cdot CD$$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times CD$$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times \left(-\frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m + 2\right)$$

$$= -\frac{5}{4}m^2 + \frac{15}{4}m + 5$$

$$\therefore -\frac{5}{4} < 0,$$

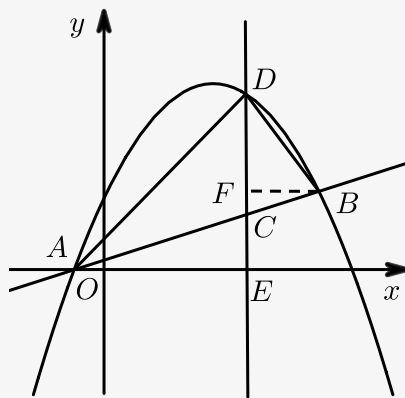
$\therefore$ 当 $m = \frac{3}{2}$ 时, S 有最大值,
 当 $m = \frac{3}{2}$ 时, $\frac{1}{2}m + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$,
 $\therefore$ 点 $C(\frac{3}{2}, \frac{5}{4})$.

方法二: 设直线 AB 为: $y = kx + b$. 则 $\begin{cases} -k + b = 0 \\ 4k + b = \frac{5}{2} \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$,

直线 AB 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

如图所示: 记 CD 与 x 轴的交点坐标为 E . 过点 B 作 $BF \perp DC$, 垂足为 F .

设 $D(m, -\frac{1}{2}m^2 + 2m + \frac{5}{2})$ 则
 $C(m, \frac{1}{2}m + \frac{1}{2})$.



$$\begin{aligned}
 \therefore CD &= \left(-\frac{1}{2}m^2 + 2m + \frac{5}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\right) \\
 &= -\frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m + 2, \\
 \therefore S &= \frac{1}{2}AE \cdot DC + \frac{1}{2}CD \cdot BF \\
 &= \frac{1}{2}CD(AE + BF) \\
 &= \frac{5}{2}DC = -\frac{5}{4}m^2 + \frac{15}{4}m + 5. \\
 \therefore S &= -\frac{5}{4}m^2 + \frac{15}{4}m + 5. \\
 \therefore -\frac{5}{4} &< 0, \\
 \therefore \text{当 } m &= \frac{3}{2} \text{ 时, } S \text{ 有最大值.} \\
 \therefore \text{当 } m &= \frac{3}{2} \text{ 时, } \frac{1}{2}m + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}. \\
 \therefore \text{点 } C &\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right).
 \end{aligned}$$

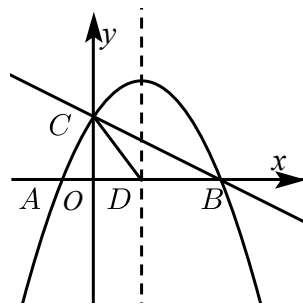
【标注】【知识点】二次函数与面积

7. 如图, 在平面直角坐标系中, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 交 x 轴于点 $A(-4, 0)$ 、 $B(2, 0)$, 交 y 轴于点 $C(0, 6)$, 在 y 轴上有一点 $E(0, -2)$, 连接 AE .

$$\begin{aligned}
\therefore S_{\triangle ADE} &= S_{\triangle ADF} + S_{\triangle EDF} = \frac{1}{2} \times DF \times AG + \frac{1}{2} DF \times EH \\
&= \frac{1}{2} \times DF \times AG + \frac{1}{2} \times DF \times EH \\
&= \frac{1}{2} \times 4 \times DF \\
&= 2 \times \left(-\frac{3}{4}m^2 - m + 8 \right) \\
&= -\frac{3}{2} \left(m + \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{50}{3}, \\
\therefore \text{当 } m &= -\frac{2}{3} \text{ 时, } \triangle ADE \text{ 的面积取得最大值为 } \frac{50}{3}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】二次函数与面积

8. 如图，抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点，与 y 轴交于点 C ，抛物线的对称轴交 x 轴于点 D ，已知 $A(-1, 0)$ ， $C(0, 2)$ 。



(1) 求抛物线的解析式。

(2) 点 E 是线段 BC 上的一个动点，过点 E 作 x 轴的垂线与抛物线相交于点 F ，当点 E 运动到什么位置时， $\triangle CBF$ 的面积最大？求出 $\triangle CBF$ 的最大面积及此时 E 点的坐标。

【答案】 (1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$ 。

(2) 当 E 运动到 BC 的中点时， $\triangle FBC$ 面积最大， $\triangle FBC$ 最大面积 = 4，此时 $E(2, 1)$ 。

【解析】 (1) 把 $A(-1, 0)$ ， $C(0, 2)$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 得 $\begin{cases} -\frac{1}{2} - b + c = 0 \\ c = 2 \end{cases}$ ，

解得 $b = \frac{3}{2}$ ， $c = 2$ ，

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$ 。

(2) 方法一：如图2中，

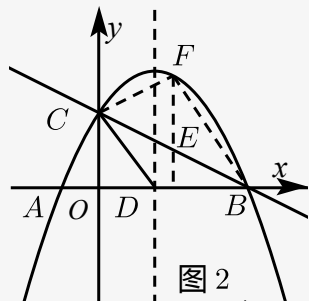


图 2

对于抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$,
 当 $y = 0$ 时, $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = 0$,
 解得 $x_1 = 4$, $x_2 = -1$,

$\therefore B(4, 0)$, $A(-1, 0)$,

由 $B(4, 0)$, $C(0, 2)$ 得直线 BC 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + 2$,

设 $E\left(m, -\frac{1}{2}m + 2\right)$ 则 $F\left(m, -\frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m + 2\right)$,

$$EF = \left(-\frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m + 2\right) - \left(-\frac{1}{2}m + 2\right)$$

$$= -\frac{1}{2}m^2 + 2m$$

$$= -\frac{1}{2}(m - 2)^2 + 2 ,$$

$\therefore -\frac{1}{2} < 0$, $\therefore$ 当 $m = 2$ 时, EF 有最大值 2 ,

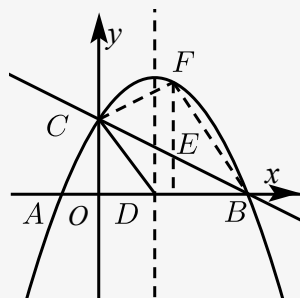
此时 E 是 BC 中点 ,

$\therefore$ 当 E 运动到 BC 的中点时, $\triangle FBC$ 面积最大 ,

$\therefore \triangle FBC$ 最大面积 $= \frac{1}{2} \times 4 \times EF = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$, 此时 $E(2, 1)$.

方法二: 当 $y = 0$ 时, 即 $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = 0$, 解得 $x = -1$ 或 $x = 4$,

$\therefore A(-1, 0)$, $B(4, 0)$,



设直线 BC 解析式为 $y = kx + s$,

由题意可得 $\begin{cases} s = 2 \\ 4k + s = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} s = 2 \\ k = -\frac{1}{2} \end{cases}$,

$\therefore$ 直线 BC 解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + 2$,

$\therefore$ 点 E 是线段 BC 上的一个动点 ,

$\therefore$ 可设 $E\left(m, -\frac{1}{2}m + 2\right)$, 则 $F\left(m, -\frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m + 2\right)$,

$$\therefore EF = -\frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m + 2 - \left(-\frac{1}{2}m + 2\right)$$

$$= -\frac{1}{2}m^2 + 2m$$

$$= -\frac{1}{2}(m - 2)^2 + 2 ,$$

$$\therefore S_{\triangle CBF} = \frac{1}{2} \times 4 \cdot EF = 2 \left[-\frac{1}{2}(m - 2)^2 + 2 \right] = -(m - 2)^2 + 4 ,$$

$\therefore -1 < 0$,

∴当 $m = 2$ 时, $S_{\triangle CBF}$ 有最大值, 最大值为4,

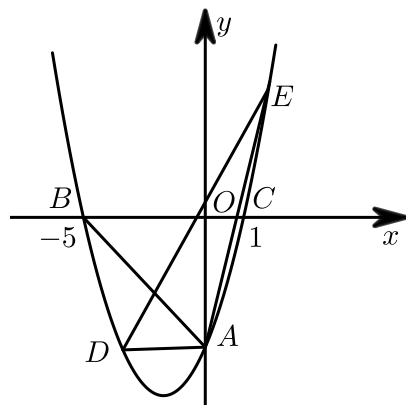
此时 $-\frac{1}{2}x + 2 = 1$,

∴ $E(2, 1)$, 即 E 为 BC 的中点,

∴当 E 运动到 BC 的中点时, $\triangle CBF$ 的面积最大, 最大面积为4, 此时 E 点坐标为 $(2, 1)$.

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

9. 如图, 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y = ax^2 + bx - 5$ 交 y 轴于点 A , 交 x 轴于点 $B(-5, 0)$ 和点 $C(1, 0)$, 过点 A 作 $AD \parallel x$ 轴交抛物线于点 D .



(1) 求此抛物线的表达式.

(2) 点 E 是抛物线上一点, 且点 E 关于 x 轴的对称点在直线 AD 上, 求 $\triangle EAD$ 的面积.

(3) 若点 P 是直线 AB 下方的抛物线上一动点, 当点 P 运动到某一位置时, $\triangle ABP$ 的面积最大, 求出此时点 P 的坐标和 $\triangle ABP$ 的最大面积.

【答案】(1) $y = x^2 + 4x - 5$.

(2) 20.

(3) $P(-\frac{5}{2}, -\frac{35}{4})$, $\frac{125}{8}$.

【解析】(1) ∵抛物线 $y = ax^2 + bx - 5$ 交 y 轴于点 A , 交 x 轴于点 $B(-5, 0)$ 和点 $C(1, 0)$,

$$\therefore \begin{cases} 25a - 5b - 5 = 0 \\ a + b - 5 = 0 \end{cases}, \text{得} \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases},$$

∴此抛物线的表达式是 $y = x^2 + 4x - 5$.

(2) ∵抛物线 $y = x^2 + 4x - 5$ 交 y 轴于点 A ,

∴点 A 的坐标为 $(0, -5)$,

∵ $AD \parallel x$ 轴, 点 E 是抛物线上一点, 且点 E 关于 x 轴的对称点在直线 AD 上,

∴点 E 的纵坐标是5, 点 E 到 AD 的距离是10,

当 $y = -5$ 时, $-5 = x^2 + 4x - 5$, 得 $x = 0$ 或 $x = -4$,

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(-4, -5)$,

$\therefore AD = 4$,

$\therefore \triangle EAD$ 的面积是： $\frac{4 \times 10}{2} = 20$.

(3) 设点 P 的坐标为 $(p, p^2 + 4p - 5)$, 如右图所示,

设过点 $A(0, -5)$, 点 $B(-5, 0)$ 的直线 AB 的函数解

析式为 $y = mx + n$,

$$\begin{cases} n = -5 \\ -5m + n = 0 \end{cases}, \text{得} \begin{cases} m = -1 \\ n = -5 \end{cases},$$

即直线 AB 的函数解析式为 $y = -x - 5$,

当 $x = p$ 时, $y = -p - 5$,

$\therefore OB = 5$,

$\therefore \triangle ABP$ 的面积是:

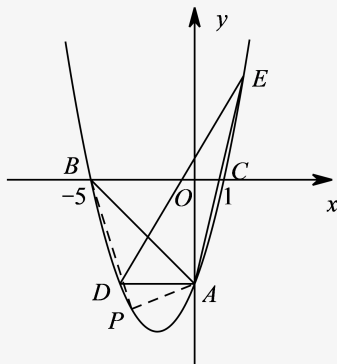
$$S = \frac{(-p - 5) - (p^2 + 4p - 5)}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2} \left[-\left(p + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \right],$$

$\therefore$ 点 P 是直线 AB 下方的抛物线上一动点,

$\therefore -5 < p < 0$,

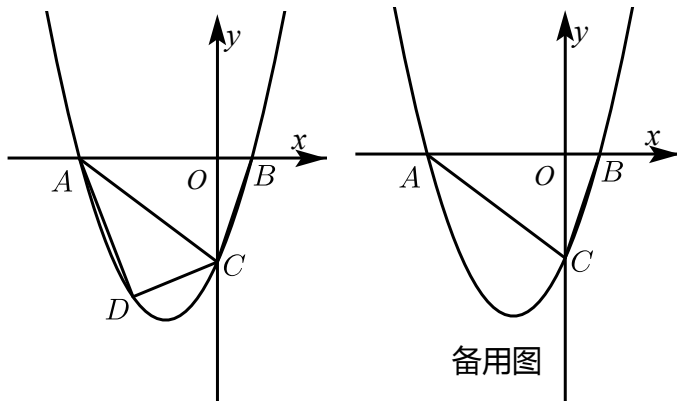
$\therefore$ 当 $p = -\frac{5}{2}$ 时, S 取得最大值, 此时 $S = \frac{125}{8}$, 点 p 的坐标是 $(-\frac{5}{2}, -\frac{35}{4})$,

即点 p 的坐标是 $(-\frac{5}{2}, -\frac{35}{4})$ 时, $\triangle ABP$ 的面积最大, 此时 $\triangle ABP$ 的面积是 $\frac{125}{8}$



【标注】【知识点】二次函数与几何最值问题

10. 已知, 如图, 抛物线 $y = ax^2 + 3ax + c (a > 0)$ 与 y 轴交于点 C , 与 x 轴交于 A, B 两点, 点 A 在点 B 左侧. 点 B 的坐标为 $(1, 0)$, $OC = 3OB$.



(1) 求抛物线的解析式;

(2) 若点 D 是线段 AC 下方抛物线上的动点, 求四边形 $ABCD$ 面积的最大值.

【答案】 (1) $y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - 3$.

$$(2) \frac{27}{2}.$$

【解析】(1) $\because B(1, 0)$

$$\therefore OB = 1$$

$$\therefore OC = 3BO$$

$$\therefore C(0, -3)$$

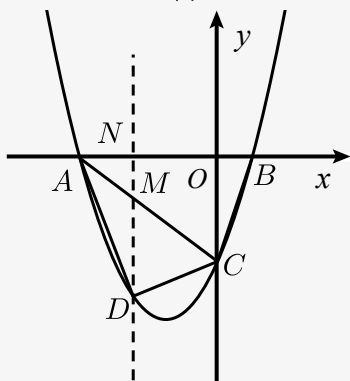
$$\therefore y = ax^2 + 3ax + c \text{ 过 } B(1, 0)、C(0, -3)$$

$$\therefore \begin{cases} c = -3 \\ a + 3a + c = 0 \end{cases}$$

$$\text{解这个方程组, 得 } \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ c = -3 \end{cases}$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为: } y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - 3.$$

(2) 过点 D 作 $DM \parallel y$ 轴分别交线段 AC 和 x 轴于点 M 、 N



$$\text{在 } y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - 3 \text{ 中, 令 } y = 0$$

$$\text{得方程 } \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - 3 = 0 \text{ 解这个方程, 得 } x_1 = -4, x_2 = 1$$

$$\therefore A(-4, 0)$$

$$\text{设直线 } AC \text{ 的解析式为 } y = kx + b$$

$$\therefore \begin{cases} -4k + b = 0 \\ b = -3 \end{cases}$$

$$\text{解这个方程组, 得 } \begin{cases} k = -\frac{3}{4} \\ b = -3 \end{cases}$$

$$\therefore AC \text{ 的解析式为: } y = -\frac{3}{4}x - 3$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC}$$

$$= \frac{15}{2} + \frac{1}{2} \cdot DM \cdot (AN + ON)$$

$$= \frac{15}{2} + 2 \cdot DM$$

$$\text{设 } D\left(x, \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - 3\right), M\left(x, -\frac{3}{4}x - 3\right)$$

$$DM = -\frac{3}{4}x - 3 - \left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - 3\right) = -\frac{3}{4}(x+2)^2 + 3$$

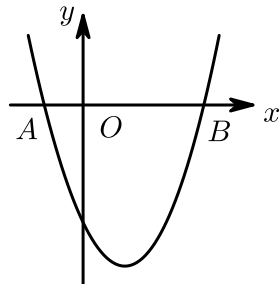
当 $x = -2$ 时, DM 有最大值 3.

此时四边形 $ABCD$ 面积有最大值 $\frac{27}{2}$.

【标注】【知识点】二次函数与面积

二、由面积求坐标

11. 如图, 已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$ 两点.



- (1) 求抛物线的解析式和顶点坐标.
- (2) 当 $0 < x < 3$ 时, 求 y 的取值范围.
- (3) 点 P 为抛物线上一点, 若 $S_{\triangle PAB} = 10$, 求出此时点 P 的坐标.

【答案】(1) $y = (x - 1)^2 - 4$, 顶点坐标 $(1, -4)$.

(2) $-4 \leq y < 0$.

(3) $P(-2, 5)$ 或 $(4, 5)$.

【解析】(1) $\because$ 抛物线经过 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$ 两点,

$$\therefore \begin{cases} 1 - b + c = 0 \\ 9 + 3b + c = 0 \end{cases},$$
$$\therefore \begin{cases} b = -2 \\ c = -3 \end{cases},$$

$$\therefore y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4,$$

$\therefore$ 顶点坐标 $(1, -4)$.

(2) $\because$ 顶点坐标 $(1, -4)$,

$\therefore$ 最小的 $y = -4$,

$\therefore -4 \leq y < 0$.

(3) $\because A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$,

$\therefore AB = 4$.

设 $P(x, y)$, 则 $S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2}AB \cdot |y| = 2|y| = 10$,

$\therefore |y| = 5$,

$\therefore y = \pm 5$.

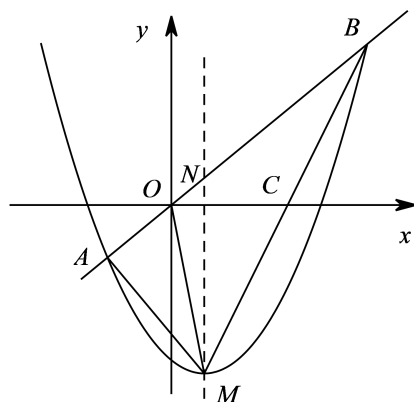
①当 $y = 5$ 时, $x^2 - 2x - 3 = 5$, 解得: $x_1 = -2, x_2 = 4$,

此时 P 点坐标为 $(-2, 5)$ 或 $(4, 5)$;

②当 $y = -5$ 时, $x^2 - 2x - 3 = -5$, 方程无解.

【标注】【知识点】二次函数与面积

12. 如图, 抛物线 $y = x^2 - 2x - 4$ 与直线 $y = x$ 交于点 A, B , 点 M 是抛物线上的一个动点, 连接 OM



(1) 当 M 为抛物线的顶点时, 求 $\triangle OMB$ 的面积.

(2) 当 $\triangle OMB$ 的面积为10时, 求点 M 的坐标.

(3) 当点 M 在直线 AB 的下方, M 运动到何处时, $\triangle OMB$ 的面积最大.

【答案】 (1) 12.

(2) 点 M 的坐标为 $(\frac{3+3\sqrt{5}}{2}, \frac{13+3\sqrt{5}}{2})$ 或 $(\frac{3-3\sqrt{5}}{2}, \frac{13-3\sqrt{5}}{2})$ 或 $(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{-7+\sqrt{5}}{2})$ 或 $(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-7-\sqrt{5}}{2})$.

(3) $M(\frac{3}{2}, -4\frac{3}{4})$.

【解析】 (1) $y = x^2 - 2x - 4 = (x-1)^2 - 5$,

$\therefore M(1, -5)$,

$\therefore N(1, 1)$,

将 $y = x$ 与 $y = x^2 - 2x - 4$ 联立得: $\begin{cases} y = x \\ y = x^2 - 2x - 4 \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$ 或

$\begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$

$\therefore A(-1, -1), B(4, 4)$,

$\therefore S_{\triangle OMB} = \frac{1}{2}NM \cdot |x_B| = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$.

(2) 设点 M 的坐标为 $(x, x^2 - 2x - 4)$, 则 $N(x, x)$, 则 $MN = |x^2 - 3x - 4|$,

$$\therefore \frac{1}{2} \times 4 \times |x^2 - 3x - 4| = 10,$$

$$\therefore x^2 - 3x - 4 = 5 \text{ 或 } x^2 - 3x - 4 = -5,$$

$$\text{解得: } x = \frac{3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \text{ 或 } x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$\therefore \text{点 } M \text{ 的坐标为 } \left(\frac{3+3\sqrt{5}}{2}, \frac{13+3\sqrt{5}}{2} \right) \text{ 或 } \left(\frac{3-3\sqrt{5}}{2}, \frac{13-3\sqrt{5}}{2} \right) \text{ 或 } \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{-7+\sqrt{5}}{2} \right) \text{ 或 } \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-7-\sqrt{5}}{2} \right).$$

(3) 设点 M 的坐标为 $(x, x^2 - 3x - 4)$, 则 $N(x, x)$, 则 $MN = -x^2 + 3x + 4$,

$$\therefore S_{\triangle OMB} = \frac{1}{2} \times 4 \times (-x^2 + 3x + 4) = -2x^2 + 6x + 8,$$

$\therefore$ 当 $x = \frac{3}{2}$ 时, $\triangle OMB$ 的面积最大,

$$\therefore M\left(\frac{3}{2}, -4\frac{3}{4}\right).$$

【标注】【知识点】二次函数与面积

13. 在平面直角坐标系中, 已知 $A(0, a)$, $B(b, 0)$, $C(b, c)$ 三点, 其中 a, b, c 满足关系式

$$(a-2)^2 + \sqrt{b-3} + |c-4| = 0.$$

(1) 求 A, B, C 三点的坐标.

(2) 如果在第二象限内有一点 $P\left(n, \frac{1}{2}\right)$, 若四边形 $ABOP$ 的面积与三角形 ABC 的面积相等, 求点 P 的坐标.

【答案】 (1) $A(0, 2)$, $B(3, 0)$, $C(3, 4)$.

$$(2) P\left(-3, \frac{1}{2}\right).$$

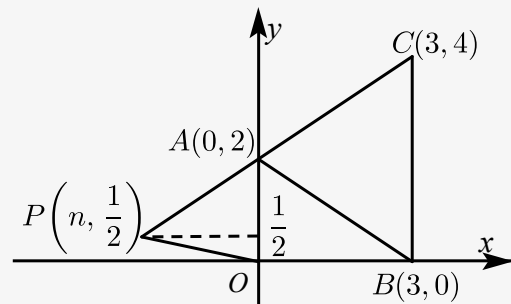
【解析】 (1) $\because (a-2)^2 + \sqrt{b-3} + |c-4| = 0$,

$$\therefore a-2=0, b-3=0, c-4=0,$$

$$\therefore a=2, b=3, c=4,$$

$$\therefore A(0, 2), B(3, 0), C(3, 4).$$

(2)



$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} BC \times 3 \\ &= \frac{3}{2} \times 4 = 6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{\text{四边形}ABOP} &= S_{\triangle AOB} + S_{\triangle AOP} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB + \frac{1}{2} OA \cdot |n| \\
 &= \frac{1}{2} \times 2 \times 3 + \frac{1}{2} \times 2(n) \\
 &= 3 + |n|.
 \end{aligned}$$

$$\because S_{\text{四边形}ABOP} = S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore 3 + |n| = 6,$$

$$\therefore |n| = 3.$$

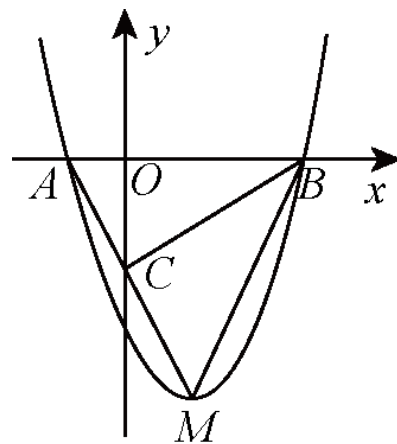
$$\because n < 0,$$

$$\therefore n = -3,$$

$$\therefore P\left(-3, \frac{1}{2}\right).$$

【标注】【知识点】二次函数与面积

14. 如图，二次函数 $y = (x - 1)^2 - 4$ 的图象与 x 轴交于 A 、 B 两点，顶点为 M ，直线 AM 与 y 轴交于点 C ，在抛物线上是否还存在点 P ，使得 $S_{\triangle PMB} = S_{\triangle BCM}$ ，如果不存在，说明理由；如存在，请求出 P 点的坐标。



【答案】有两个 P 点，分别是 $(2 + \sqrt{5}, 2 + 2\sqrt{5})$ ， $(2 - \sqrt{5}, 2 - 2\sqrt{5})$ 。

【解析】根据抛物线解析式求得各点的坐标分别如下：

$$A(-1, 0)、B(3, 0)、C(0, -2)、M(1, -4)$$

根据点 B 、 M 的坐标可得直线 BM 的解析式为： $y = 2x - 6$ 。

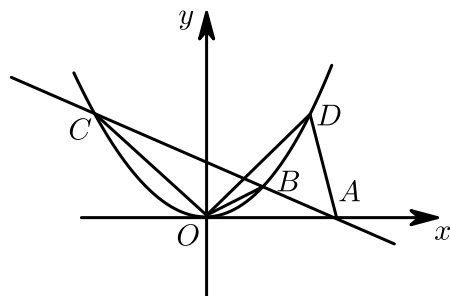
过点 C 作 BM 的平行线 $y = 2x - 2$ ，联立 $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$

$$\text{解得} \begin{cases} x_1 = 2 + \sqrt{5} \\ y_1 = 2 + 2\sqrt{5} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 2 - \sqrt{5} \\ y_2 = 2 - 2\sqrt{5} \end{cases}$$

即有两个 P 点，分别是 $(2 + \sqrt{5}, 2 + 2\sqrt{5})$ ， $(2 - \sqrt{5}, 2 - 2\sqrt{5})$ 。

【标注】【知识点】二次函数与面积

15. 如图, 直线 AB 过 x 轴上的点 $A(2, 0)$, 且与抛物线 $y = ax^2$ 相交于 B 、 C 两点, B 点坐标为 $(1, 1)$.



(1) 求直线和抛物线所表示的函数表达式.

(2) 在抛物线上是否存在一点 D , 使得 $S_{\triangle OAD} = S_{\triangle OBC}$? 若不存在, 说明理由; 若存在, 请求出点 D 的坐标.

【答案】(1) $y = -x + 2$, $y = x^2$.

(2) $(\sqrt{3}, 3)$, $(-\sqrt{3}, 3)$

【解析】(1) 设直线表达式为 $y = ax + b$.

$\because A(2, 0)$, $B(1, 1)$ 都在 $y = ax + b$ 的图象上,

$$\therefore \begin{cases} 0 = 2a + b \\ 1 = a + b \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 AB 的表达式 $y = -x + 2$.

$\because$ 点 $B(1, 1)$ 在 $y = ax^2$ 的图象上,

$\therefore a = 1$, 其表达式为 $y = x^2$.

$$(2) \therefore \begin{cases} y = x^2 \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$\therefore$ 点 C 坐标为 $(-2, 4)$, 设 $D(a, a^2)$.

$$\therefore S_{\triangle OAD} = \frac{1}{2} |OA| \cdot |y_D| = \frac{1}{2} \times 2 \cdot a^2 = a^2.$$

$$\therefore S_{\triangle BOC} = S_{\triangle AOC} - S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 - \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 3.$$

$$\therefore S_{\triangle BOC} = S_{\triangle OAD},$$

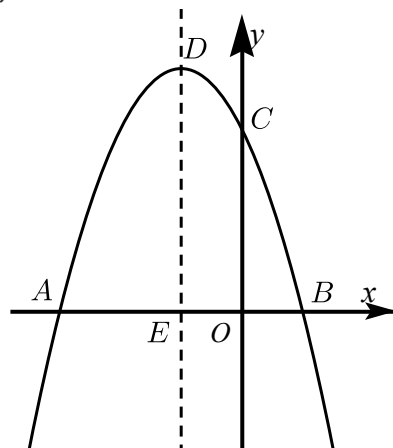
$$\therefore a^2 = 3,$$

$$\text{即 } a = \pm\sqrt{3}.$$

$$\therefore D \text{ 点坐标为 } (\sqrt{3}, 3), (-\sqrt{3}, 3).$$

【标注】【知识点】二次函数与面积

16. 如图，已知抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 的图象过点 $A(-3, 0)$ ， $C(0, 3)$ 。



- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) 在抛物线的对称轴 DE 上是否存在点 P ，使得点 P 到直线 AD 和到 x 轴的距离相等？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，说明理由。
- (3) 在对称轴左侧的抛物线上是否存在点 F ，使得 $2S_{\triangle FBC} = 3S_{\triangle EBC}$ ？若存在，求出点 F 的坐标；若不存在，说明理由。

【答案】 (1) 解析式为： $y = -x^2 - 2x + 3$ 。

(2) 存在； $P(-1, \sqrt{5} - 1)$ 或 $P(-1, -\sqrt{5} - 1)$ 。

(3) 存在； $F\left(\frac{1 - \sqrt{37}}{2}, \frac{3\sqrt{37} - 15}{2}\right)$ 。

【解析】 (1) 将 $A(-3, 0)$ ， $C(0, 3)$ 代入 $y = -x^2 + bx + c$ 。

$$\begin{aligned} &\text{解} \begin{cases} c = 3 \\ -9 - 3b + c = 0 \end{cases} \\ &\therefore \begin{cases} b = -2 \\ c = 3 \end{cases} \\ &y = -x^2 - 2x + 3. \end{aligned}$$

(2) 当 P 在 $\angle DAB$ 的角平分线上时，

如图1，作 $PM \perp AD$ ，设 $P(-1, y_0)$ ，

$$\text{则 } PM = PD \cdot \sin \angle ADE = \frac{\sqrt{5}}{5}(4 - y_0), \quad PE = y_0,$$

$$\therefore PM = PE,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{5}}{5}(4 - y_0) = y_0, \text{ 解得 } y_0 = \sqrt{5} - 1, \quad P(-1, \sqrt{5} - 1).$$

当 P 在 $\angle DAB$ 的外角平分线上时，

如图2，作 $PN \perp AD$ ，设 $P(-1, y_0)$ ，

$$\text{则 } PN = PD \cdot \sin \angle ADE = \frac{\sqrt{5}}{5}(4 - y_0), \quad PE = y_0$$

$$\therefore PN = PE,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{5}}{5}(4-y_0) = -y_0, \text{ 解得 } y_0 = -\sqrt{5}-1, P(-1, -\sqrt{5}-1).$$

综上所述, P 点坐标为 $P(-1, \sqrt{5}-1)$ 或 $P(-1, -\sqrt{5}-1)$.

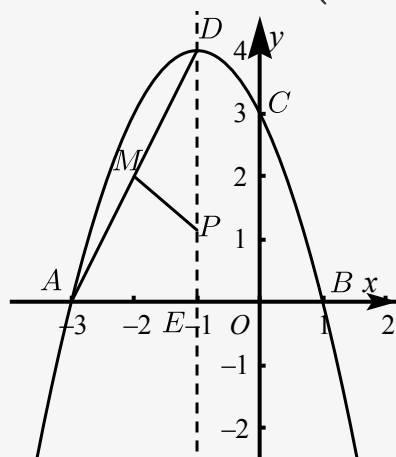


图1

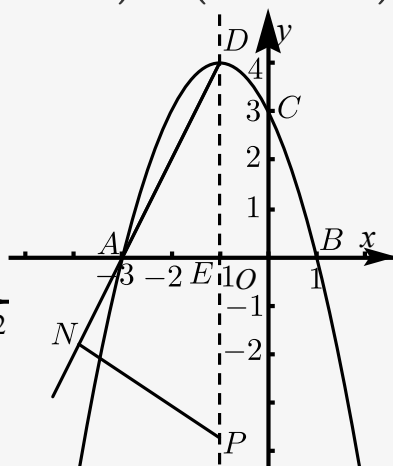


图2

$$(3) S_{\triangle BCE} = 3, \text{ 又 } 2S_{\triangle FBC} = 3S_{\triangle EBC},$$

$$\therefore S_{\triangle FBC} = \frac{9}{2},$$

如答图3, 过 F 作 $FQ \perp x$ 轴交 BC 延长线于 Q ,

$$\text{则: } S_{\triangle FBC} = S_{\triangle FBQ} - S_{\triangle FCQ} = \frac{1}{2} FQ \cdot OB = \frac{9}{2},$$

$$BC: y = -3x + 3,$$

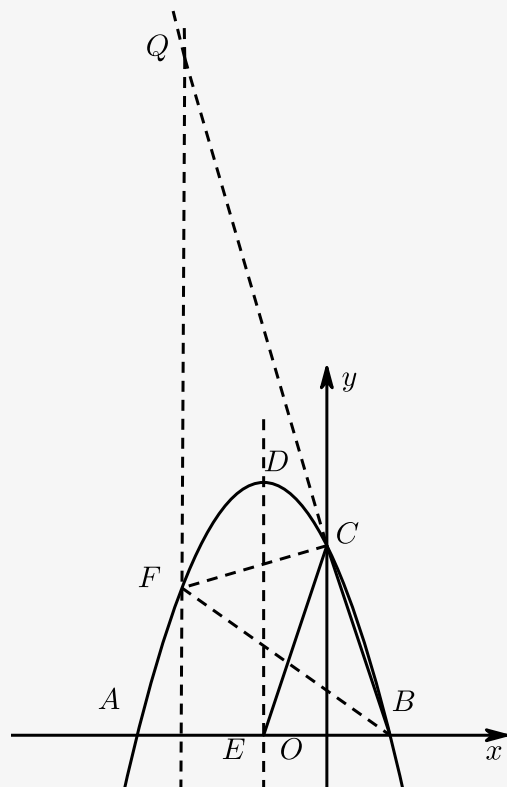
$$\text{设 } F(x_0, -x_0^2 - 2x_0 + 3), \text{ 则 } Q(x_0, -3x_0 + 3),$$

$$\therefore -3x_0 + 3 + x_0^2 + 2x_0 - 3 = 9,$$

$$\therefore x_0^2 - x_0 - 9 = 0,$$

$$\therefore x_0 = \frac{1 - \sqrt{37}}{2}, \text{ (} x_0 = \frac{1 + \sqrt{37}}{2} \text{ 舍去),}$$

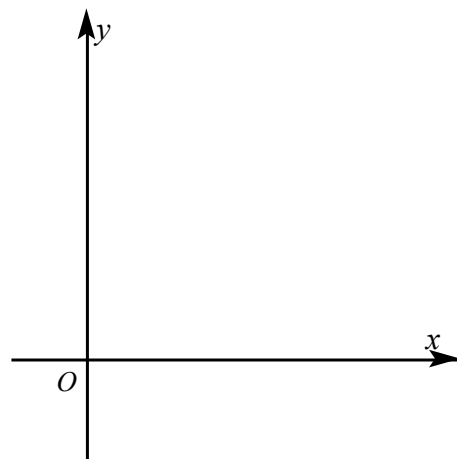
$$\therefore F\left(\frac{1 - \sqrt{37}}{2}, \frac{3\sqrt{37} - 15}{2}\right).$$



答图3

【标注】【知识点】二次函数与面积

17. 在平面直角坐标系中，已知抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 A 、 B （点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴的正半轴交于点 C ，顶点为 E 。



- (1) 若 $b = 2$ ， $c = 3$ ，求此时抛物线顶点 E 的坐标。
- (2) 将(1)中的抛物线向下平移，若平移后，在四边形 $ABEC$ 中满足 $S_{\triangle BCE} = S_{\triangle ABC}$ ，求此时直线 BC 的解析式。
- (3) 将(1)中的抛物线作适当的平移，若平移后，在四边形 $ABEC$ 中满足 $S_{\triangle BCE} = 2S_{\triangle AOC}$ ，且顶点 E 恰好落在直线 $y = -4x + 3$ 上，求此时抛物线的解析式。

【答案】(1) (1, 4).

$$(2) y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}.$$

$$(3) y = -x^2 + x + \frac{3}{4}.$$

【解析】(1) 当 $b = 2, c = 3$ 时, 抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3 = -(x - 1)^2 + 4$,

$\therefore$ 抛物线顶点 E 的坐标为 $(1, 4)$.

故答案为: $(1, 4)$.

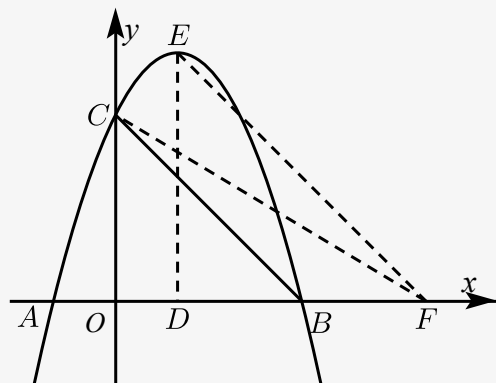
(2) 方法一: 设平移后抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 2x + c$,

$\therefore$ 此时抛物线与 y 轴的交点为 $C(0, c)$, 顶点为 $E(1, 1 + c)$,

$\therefore$ 方程 $-x^2 + 2x + c = 0$ 的两个根为 $x_1 = 1 - \sqrt{1 + c}, x_2 = 1 + \sqrt{1 + c}$,

$\therefore A(1 - \sqrt{1 + c}, 0), B(1 + \sqrt{1 + c}, 0)$,

如图, 过点 E 作 $EF \parallel BC$ 与 x 轴交于点 F , 联结 CF ,



则 $S_{\triangle BCE} = S_{\triangle BCF}$,

$\therefore S_{\triangle BCF} = S_{\triangle BCE} = S_{\triangle ABC}$,

$\therefore BF = AB = 2\sqrt{1 + c}$,

设对称轴 $x = 1$ 与 x 轴交于点 D ,

则 $DF = \frac{1}{2}AB + BF = 3\sqrt{1 + c}$,

由 $EF \parallel CB$ 得 $\angle EFD = \angle CBO$,

$\therefore \text{Rt}\triangle EDF \sim \text{Rt}\triangle COB$,

$\therefore \frac{ED}{DF} = \frac{CO}{OB}$, 即 $\frac{1 + c}{3\sqrt{1 + c}} = \frac{c}{1 + \sqrt{1 + c}}$,

结合题意, 解得 $c = \frac{5}{4}$,

$\therefore$ 点 $C(0, \frac{5}{4}), B(\frac{5}{2}, 0)$,

设直线 BC 的解析式为 $y = mx + n$,

$$\text{则} \begin{cases} \frac{5}{4} = n \\ 0 = \frac{5}{2}mn \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ n = \frac{5}{4} \end{cases},$$

即直线 BC 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$.

故答案为： $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$.

方法二：设 $y = -(x-1)^2 + k (k > 0)$,

则 $E(1, k)$, $C(0, k-1)$, $A(1-\sqrt{k}, 0)$, $B(1+\sqrt{k}, 0)$,

$$\begin{aligned} S_{\triangle CEP} &= S_{\triangle COE} + S_{\triangle OBE} - S_{\triangle COB} \\ &= \frac{1}{2}(k-1) + \frac{1}{2}k(1+\sqrt{k}) - \frac{1}{2}(1+\sqrt{k})(k-1) \\ &= \frac{1}{2}(k+\sqrt{k}), \end{aligned}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot OC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{k}(k-1),$$

$$S_{\triangle CEP} = S_{\triangle ABC} \Rightarrow \sqrt{k} = \frac{3}{2} \text{ (负值舍)},$$

$$\therefore C\left(0, \frac{5}{4}\right), B\left(\frac{5}{2}, 0\right) \Rightarrow BC: y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}.$$

故答案为： $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$.

(3) 根据题意, 设抛物线的顶点为 $E(h, k)$, ($h > 0, k > 0$),

则抛物线的解析式为 $y = -(x-h)^2 + k$, $C(0, -h^2 + k)$,

与 x 轴的交点为 $A(h-\sqrt{k}, 0)$, $B(h+\sqrt{k}, 0)$ ($\sqrt{k} > h > 0$),

过点 E 作 $EF \parallel CB$ 与 x 轴交于点 F ,

联结 CF , 则 $S_{\triangle BCF} = S_{\triangle BCE} = 2S_{\triangle AOC}$,

$$\therefore BF = 2AO = 2(\sqrt{k} - h),$$

设该抛物线的对称轴与 x 轴交于点 D ,

$$\text{则 } DF = \frac{1}{2}AB + BF = 3\sqrt{k} - 2h,$$

由 $\text{Rt}\triangle EDF \sim \text{Rt}\triangle COB$, 得 $\frac{ED}{DF} = \frac{CO}{OB}$,

$$\text{即 } \frac{k}{3\sqrt{k} - 2h} = \frac{-h^2 + k}{h + \sqrt{k}},$$

$$\text{即 } 2h^2 - 5\sqrt{k}h + 2k = 0.$$

$$\text{结合题意, 解得 } h = \frac{\sqrt{k}}{2}$$

又 $\because$ 点 $E(h, k)$ 在直线 $y = -4x + 3$ 上,

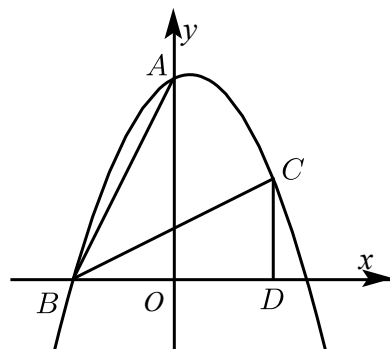
$$\therefore k = -4h + 3 = -4 \times \frac{\sqrt{k}}{2} + 3,$$

$$\text{解得 } \sqrt{k} = 1, \text{ 则 } k = 1, h = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = -x^2 + x + \frac{3}{4}.$$

故答案为： $y = -x^2 + x + \frac{3}{4}$.

18. 在直角坐标系 xOy 中, $A(0, 2)$ 、 $B(-1, 0)$, 将 $\triangle ABO$ 经过旋转、平移变化后得到如图所示的 $\triangle BCD$.



- (1) 求经过 A 、 B 、 C 三点的抛物线的解析式.
 (2) 连结 AC , 点 P 是位于线段 BC 上方的抛物线上一动点, 若直线 PC 将 $\triangle ABC$ 的面积分成1:3两部分, 求此时点 P 的坐标.

【答案】(1) $y = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 2$.
 (2) $P(-\frac{2}{5}, \frac{39}{25})$ 或 $P(-\frac{6}{7}, \frac{23}{49})$.

【解析】(1) $\because A(0, 2)$ 、 $B(-1, 0)$, 将 $\triangle ABO$ 经过旋转、平移变化得到 $\triangle BCD$,

$$\therefore BD = OA = 2, CD = OB = 1, \angle BDC = \angle AOB = 90^\circ.$$

$$\therefore C(1, 1).$$

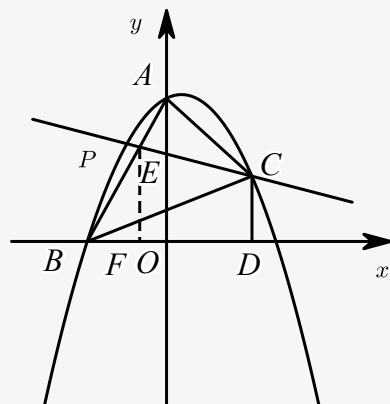
设经过 A 、 B 、 C 三点的抛物线解析式为 $y = ax^2 + bx + c$,

$$\text{则有} \begin{cases} a - b + c = 0 \\ a + b + c = 1 \\ c = 2 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = 2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线解析式为} y = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 2.$$

(2) 如图所示,



设直线 PC 与 AB 交于点 E .

$\because$ 直线 PC 将 $\triangle ABC$ 的面积分成 $1:3$ 两部分 ,

$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{1}{3} \text{ 或 } \frac{AE}{BE} = 3 ,$$

过 E 作 $EF \perp OB$ 于点 F , 则 $EF \parallel OA$.

$$\therefore \triangle BEF \sim \triangle BAO ,$$

$$\therefore \frac{EF}{AO} = \frac{BE}{BA} = \frac{BF}{BO} .$$

$$\therefore \text{当 } \frac{AE}{BE} = \frac{1}{3} \text{ 时, } \frac{EF}{AO} = \frac{1}{4} = \frac{BF}{BO} ,$$

$$\therefore EF = \frac{3}{2} , BF = \frac{3}{4} ,$$

$$\therefore E(-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}) ,$$

$$\therefore \text{直线 } PC \text{ 解析式为 } y = -\frac{2}{5}x + \frac{7}{5} ,$$

$$\therefore -\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 = -\frac{2}{5}x + \frac{7}{5} ,$$

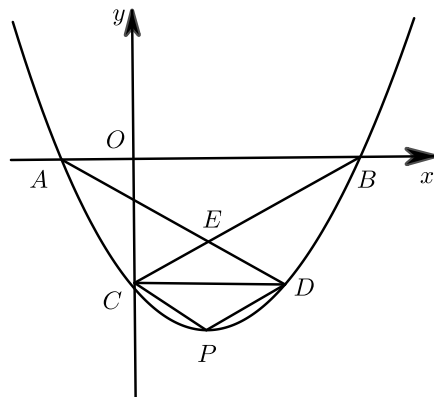
$$\therefore x_1 = -\frac{2}{5} , x_2 = 1 \text{ (舍去)} ,$$

$$\therefore P(-\frac{2}{5}, \frac{39}{25}) ,$$

$$\text{当 } \frac{AE}{BE} = 3 \text{ 时, 同理可得, } P(-\frac{6}{7}, \frac{23}{49}) .$$

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

19. 如图 , 在平面直角坐标系中 , 已知 $A(-2, 0)$, $B(6, 0)$, $C(0, -3)$.



- (1) 经过A、B、C三点的抛物线的解析式是？
- (2) 过C点作CD平行于x轴交抛物线于点D，写出D点的坐标，并求AD、BC的交点E的坐标．
- (3) 若抛物线的顶点为P，连结PC、PD．
- ① 判断四边形CEDP的形状，并说明理由．
 - ② 若在抛物线上存在点Q，使直线OQ将四边形PCED分成面积相等的两个部分，请直接写出点Q的坐标．_____．若不存在，请说明理由．

【答案】 (1) $y = \frac{1}{4}x^2 - x - 3$ ．

(2) E的坐标(2, -2)．

(3) ① 四边形CEDP是菱形．

$$\textcircled{2} \left(-1 + \sqrt{13}, \frac{3 - 3\sqrt{13}}{2}\right) \text{和} \left(-1 - \sqrt{13}, \frac{3 + 3\sqrt{13}}{2}\right)$$

【解析】 (1) 由于抛物线经过点C(0, -3)，可设抛物线的解析式为 $y = ax^2 + bx - 3$ ($a \neq 0$)

$\because A(-2, 0), B(6, 0)$ 在抛物线图像上，

$$\therefore \text{有} \begin{cases} 4a - 2b - 3 = 0 \\ 36a + 6b - 3 = 0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -1 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = \frac{1}{4}x^2 - x - 3$ ．

$$(2) \text{ 抛物线的对称轴为 } x = -\frac{-1}{2 \times \frac{1}{4}} = 2,$$

$\therefore CD // x$ 轴，

$\therefore C、D$ 关于对称轴 $x = 2$ 对称，

故D点坐标为 $(2 \times 2 - 0, -3)$ ，即 $D(4, -3)$ ．

设直线AD的解析式为 $y = k_1x + b_1$ ，直线BC的解析式为 $y = k_2x + b_2$ ，

$$\text{那么有} \begin{cases} 0 = -2k_1 + b_1 \\ -3 = 4k_1 + b_1 \end{cases} \text{和} \begin{cases} 0 = 6k_2 + b_2 \\ -3 = b_2 \end{cases}$$

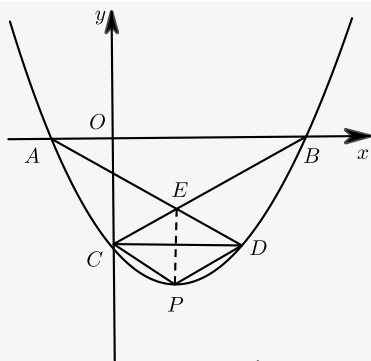
$$\text{解得} \begin{cases} k_1 = -\frac{1}{2} \\ b_1 = -1 \end{cases} \text{和} \begin{cases} k_2 = \frac{1}{2} \\ b_2 = -3 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线AD的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x - 1$ ，直线BC的解析式为 $y = \frac{1}{2}x - 3$ ．

$$\text{解} \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x - 1 \\ y = \frac{1}{2}x - 3 \end{cases}, \text{得} \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线AD、BC的交点E的坐标(2, -2)．

(3) ① 连接PE交CD于F点，如图：



$\therefore P$ 点为抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2 - x - 3$ 的顶点，

$\therefore P$ 的坐标为 $(2, -4)$ 。

又 $\because E(2, -2)$ 、 $C(0, -3)$ 、 $D(4, -3)$

$\therefore$ 直线 CD 解析式为 $y = -3$ ，直线 EF 解析式为 $x = 2$ ，

$\therefore F$ 点的坐标为 $(2, -3)$ ，且 $CD \perp EP$ ，

$\therefore PE = EF = 1$ ， $CF = FD = 2$ ，

$\therefore$ 四边形 $CEDP$ 是菱形。

② 假设存在，

$\therefore$ 直线 OQ 将四边形 $PCED$ 分成面积相等的两个部分，

$\therefore$ 直线 OQ 必过点 $F(2, -3)$ 。

设直线 OQ 的解析式为 $y = kx$ ，则有 $-3 = 2k$ ，即 $k = -\frac{3}{2}$ ，

$\therefore Q$ 点在直线 OQ 和抛物线上，

$$\therefore \text{点} Q \text{的坐标满足} \begin{cases} y = \frac{3}{2}x \\ y = \frac{1}{4}x^2 - x - 3 \end{cases}$$

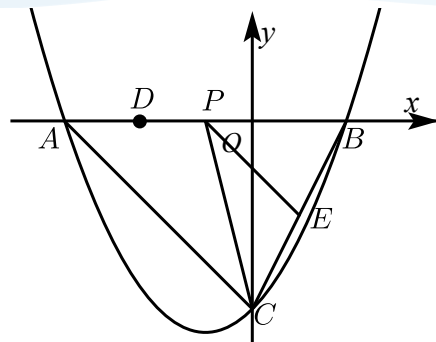
$$\text{解得} \begin{cases} x = -1 + \sqrt{13} \\ y = \frac{3 - 3\sqrt{13}}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -1 - \sqrt{13} \\ y = \frac{3 + 3\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

散存在点 Q ，使得直线 OQ 将四边形 $PCED$ 分成面积相等的两个部分， Q 点的

坐标为 $\left(-1 + \sqrt{13}, \frac{3 - 3\sqrt{13}}{2}\right)$ 和 $\left(-1 - \sqrt{13}, \frac{3 + 3\sqrt{13}}{2}\right)$ 。

【标注】【知识点】二次函数与面积

20. 如图，抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$ 与 y 轴交于点 C ，与 x 轴交于点 A 、 B 。若点 P 是 AB 上的一个动点，过点 P 作 $PE \parallel AC$ 交 BC 于点 E ，连接 CP ，求 $\triangle PCE$ 面积最大时 P 点的坐标。



【答案】 $(-1, 0)$.

【解析】 令 $y = 0$, 即 $\frac{1}{2}x^2 + x - 4 = 0$, 解得

$$x_1 = -4, x_2 = 2,$$

$$\therefore A(-4, 0), S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot OC = 12,$$

设 P 点坐标为 $(x, 0)$, 则 $PB = 2 - x$,

$\therefore PE \parallel AC$,

$\therefore \angle BPE = \angle BAC, \angle BEP = \angle BCA$,

$\therefore \triangle PBE \sim \triangle BAC$,

$$\frac{S_{\triangle PBE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{PB}{AB}\right)^2, \text{ 即}$$

$$\frac{S_{\triangle PBE}}{12} = \left(\frac{2-x}{6}\right)^2,$$

$$\text{化简得: } S_{\triangle PBE} = \frac{1}{3}(2-x)^2,$$

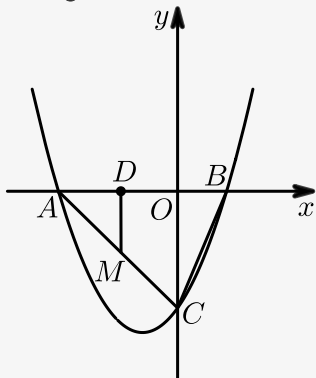
$$S_{\triangle PCE} = S_{\triangle PCB} - S_{\triangle PBE}$$

$$= \frac{1}{2}PB \cdot OC - S_{\triangle PBE}$$

$$= \frac{1}{2} \times (2-x) \times 4 - \frac{1}{3}(2-x)^2$$

$$= -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$$

$$= -\frac{1}{3}(x+1)^2 + 3,$$



答图 ①

$\therefore$ 当 $x = -1$ 时, $S_{\triangle PCE}$ 的最大值为 3 .

P 的坐标为 $(-1, 0)$.

【标注】【知识点】二次函数与面积